Программа по функциональному анализу механики, 2012г.

1. Линейные пространства, линейная зависимость, размерность, норма, непрерывность, открытые и замкнутые множества, непрерывность нормы, эквивалентные нормы, теорема об эквивалентности норм в конечномерном пространстве.

2. Полнота пространства, сходимость и абсолютная сходимость рядов в нормированном пространстве, плотные множества, пополнение.

3. Пространства C, L_p, неравенства Гёльдера и Минковского, плотные множества – теорема Вейерштрасса, полнота L_p*, теорема о плотности множества гладких финитных функций в L_p.

4. Принцип сжимающих отображений, интегральное уравнение Вольтерра.

5. Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма линейного оператора. Теорема о продолжении по непрерывности, пример (интеграл Римана). Пространство линейных непрерывных операторов, полнота. Обратный оператор. Теорема об обратимости оператора, близкого к обратимому.

6. Скалярное произведение, ортогональность, ортонормированные системы, варианты теоремы Пифагора, неравенство Бесселя, гильбертово пространство. Ортогональные ряды, критерий сходимости. Полные ортогональные системы, ряд Фурье по полной ортогональной системе. Равенство Парсеваля, критерии полноты системы. Стандартная система синусов и косинусов – полная ортогональная система в $L_2(0,2\pi)$. Ортогонализация, существование полной ортонормированной системы. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

7. Теорема о наилучшем приближении. Проекция. Ортогональное дополнение, разложение в прямую сумму. Функционалы, теорема Рисса. Пример – задача Штурма – Лиувилля. Энергетическое пространство и обобщённое решение задачи Штурма - Лиувилля.

Сопряженный оператор и его свойства.

8. Компактные множества – определение и простейшие свойства, ϵ-сети, теорема Хаусдорфа*. Теорема Арцела*. Компактные операторы - простейшие свойства, конечномерные операторы, приближение компактных операторов конечномерными. Компактность интегрального оператора с непрерывным ядром. Теорема Фредгольма*. Альтернатива Фредгольма.

9. Интегральные операторы. Ограниченность интегральных операторов в L_2. Операторы со слабой особенностью, компактность оператора со слабой особенностью.

10. Определение спектра ограниченного оператора, теорема о свойствах спектра. Спектр компактного оператора. Спектр самосопряженного оператора. Лемма о вычислении нормы самосопряженного оператора. Теорема о собственном числе компактного самосопряжённого оператора. Спектральная теорема для компактного самосопряжённого оператора.

Для оценки «удовлетворительно» на вопросы, помеченные * достаточно формулировок и понимания.

Литература:

1. Архипова А.А., Кароль А.И. Введение в функциональный анализ (учебное пособие). Изд-во СПбГУ, 1999.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.
3. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. М., 1979.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1972.
5. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1. М., 1977.
7. Треногин В.А. Функциональный анализ. М., 1980.
8. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. М., 1984.