ПРОГРАММА КУРСА
«ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»
математики, 5-ый семестр, 2012.

1. Постановка классических вариационных задач, четыре леммы вариационного исчисления.
2. Производная по направлению, дифференциал Гато, дифференциал Фреше, необходимые условия экстремума функционала во всем пространстве, на линеале, на выпуклом множестве, на поверхности уровня.
3. Гладкость интегрального функционала, необходимое условие экстремума интегрального функционала в случае «закрепленных» концов, уравнение Эйлера, гладкость экстремали и пример отсутствия гладкости, естественные граничные условия, пример недостижимости глобального минимума.
4. Общая форма первой вариации, условие трансверсальности, задача с разрывной производной и условие Вейерштрасса-Эрдмана, односторонняя вариационная задача.
5. Вычисление второй вариации интегрального функционала, вторая вариация и необходимые условия локального минимума: неотрицательность второй вариации, условие Лежандра, условия Якоби, вторая вариация и достаточные условия локального минимума: положительная определенность второй вариации, усиленное условие Якоби.
6. Многомерные вариационные задачи, уравнение Эйлера и естественные граничные условия, принцип наименьшего действия и уравнение колебания струны.
7. Слабая сходимость в банаховом пространстве, рефлексивность и слабая компактность, слабая замкнутость, теорема о существовании глобального минимума слабо полунепрерывного снизу коэрцитивного функционала на слабо замкнутом множестве рефлексивного банахова пространства, пример отсутствия глобального минимума у непрерывного коэрцитивного функционала, пример слабо полунепрерывного снизу коэрцитивного функционала и слабо замкнутого множества.
8. Абсолютно непрерывные функции, формула Ньютона-Лейбница, формула интегрирования по частям, пространство Соболева: скалярное произведение в нем, полнота, ограниченность и компактность оператора вложения в пространство непрерывных функций.
9. Классическая и обобщенная постановки задачи Штурма-Лиувилля, их эквивалентность, специальное скалярное произведение, теорема единственности решения и его существование при достаточно большем коэффициенте q.
10. Задача на собственные функции и собственные числа оператора Штурма-Лиувилля, эквивалентность ее классической и обобщенной постановок, априорные свойства собственных функций и собственных чисел: ограниченность снизу множества собственных чисел, простота каждого собственного числа, ортогональность собственных функций отвечающих различным собственным значениям, конечность множества собственных чисел на ограниченном интервале, вариационный метод построения множества собственных функций и собственных чисел, полнота ортонормированной системы собственных функций, построенные вариационным методом собственные числа и собственные функции – все собственные числа и собственные функции оператора Штурма-Лиувилля.
11. Разрешимость линейного уравнения в конечномерном и бесконечномерном пространствах, альтернативы Фредгольма для задачи Штурма-Лиувилля, метод Фурье и доказательство альтернатив Фредгольма.

ЛЕКТОР
ОСМОЛОВСКИЙ В.Г.