Кафедра математической физики

Курсовые работы для студентов II курса

Профессор УРАЛЬЦЕВА Нина Николаевна

1. Функция расстояния и барьеры.

Литература: Д. Гилбарг, Н.С. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., Наука. 1989. п.14.6.

2. Хаусдорфова мера.

Литература: Л.К. Эванс, Р.Ф.Гариепи. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск, Научная книга, 2002. Глава 2.

3. Выпуклые функции.

Литература: Л.К. Эванс, Р.Ф.Гариепи. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск, Научная книга, 2002. п.6.3, 6.4

Все три темы предполагают изучение литературы с последующим решением конкретных задач.

Профессор АРХИПОВА Арина Алексеевна

1. Оценка подмножеств фиксированного множества R^n в терминах емкости и хаусдорфовой меры. Сравнение характеристик.

Решения дифференциальных уравнений в частных производных могут иметь особенности в области рассмотрения. В нестационарных задачах сингулярные множества могут появлятся и исчезать со временем. Сингулярные множества решений часто описываются в терминах их хаусдорфовой меры и емкости.

2. Изоморфизм функциональных пространств Кампанато и Гельдера.

Следующий этап работы: обобщение пространств Кампанато самостоятельно.

Современная теория регулярности обобщенных решений линейных уравнений и систем базируется на применении функциональных пространств Морри и Кампанато. Эта теория сформировалась в 70-е годы XX века. Она позволяет достаточно элементарно провести полное исследование гладкости обобщенных решений широкого класса краевых задач. В частности, из нее следуют классические результаты о регулярности решений в пространствах функций, непрерывных по Гельдеру.

Литературу можно получить у преподавателя.

Профессор ДЕРГУЗОВ Виктор Иванович

1. Рассматривается дифференциальное уравнение в конечномерном пространстве

$$J\dot{x} = Hx + i\epsilon Qx, \tag{1}$$

в котором матрицы H, Q, J удовлетворяют условиям

$$H^* = H, \quad Q^* = Q > 0, \quad J^* = -J = J^{-1},$$

и ϵ – положительный параметр. Обозначим $X(\epsilon)$ матричное решение $X(t, \epsilon)$ уравнения при $t = 1$, которое нормировано условием $X(0, \epsilon) = I$.

Предлагается доказать следующие утверждения:

а). Спектр матрицы $X(\epsilon)$ не лежит на единичной окружности.

б). Пусть $P_\pm(\epsilon)$ – проекторы, отвечающие спектру матрицы $X(\epsilon)$, который лежит внутри или вне единичной окружности. Тогда справедливы равенства

$$P^*_\pm(\epsilon)J = JP_\mp(-\epsilon)$$

2. Для уравнения (1) доказать существование решения дифракционной задачи. Дана падающая волна $x_+(t)$ – решение уравнения (1) при $t < 0$, которое удовлетворяет условию $x_+(t) = P_+(\epsilon)x_+(t)$. Найти отраженную $x_-(t)$ волну – решение (1) при $t < 0$, удовлетворяющее условию $x_-(t) = P_-(\epsilon)x_-(t)$, и проходящую волну $\hat{x}_+(t)$ – решение (1) при $t > 0$, удовлетворяющее условию $\hat{x}_+(t) = \hat{P}_+(t)\hat{x}_+(t)$. В нуле для этих решений должно выполняться равенство

$$x_+(0) + x_-(0) = \hat{x}_+(0).$$

Доцент КАРОЛЬ Андрей Игоревич

1. Асимптотические разложения интегралов: метод Лапласа, метод стационарной фазы.

Предполагается вначале освоить технику построения асимптотических разложений интегралов. Основной интерес для дальнейшего представляют разложения кратных интегралов в случае, когда фазовая функция в экстремальной точке вырождена.

Литература: М.В.Федорюк. Метод перевала, М., Наука, 1977г. 1-3 главы.

2. Асимптотика объема множества меньших значений функции.

Предполагается получить асимптотики объема меньших значений для функций, имеющих в данной точке минимума росток с данным многогранником Ньютона.

Литературу можно получить у преподавателя.

Профессор НАЗАРОВ Александр Ильич

1. Задача Вентцеля – постановка и простейшие свойства.

Нужно изучить по литературе постановку простейших краевых задач для уравнений в частных производных "из физических соображений" и применить полученные навыки к одной из неклассических задач – так называемой задаче Вентцеля. Работа требует от студента наличия некоторых следов обучения физике в школе.

2. Перестановки функций (геометрические и аналитические свойства).

Симметричные и монотонные перестановки (rearrangements) последовательностей и функций имеют многочисленные применения в современном вариационном исчислении и в теории уравнений в частных производных. Работа предполагает изучение их свойств по литературе и вывод этих свойств для некоторых аналогичных операций над функциями.

3. Выпуклые и выпукло-монотонные оболочки функций (аналитические свойства геометрических объектов; тема интересная, но трудная).

Дальнейшие указания и литературу можно получить у преподавателя.

Профессор ОСМОЛОВСКИЙ Виктор Георгиевич

1. Функция Грина для оператора Лапласа.

Курсовая работа по этой теме предполагает изучение простейших свойств функции Грина для оператора Лапласа и самостоятельное построение ее в некоторых простых областях.

2. Сравнение дифференциала Гато интегрального функционала с внутренней вариацией.

Предполагается ознакомление с необходимыми условиями экстремума интегрального функционала. Доказательство совпадения необходимых условий, полученных при стандартной и внутренней вариации этого функционала в гладком случае. Самостоятельное вычисление внутренней вариации в ряде негладких задач или задач со связями.

3. Пространство Соболева на отрезке.

Одним из методов изучения задач математической физики является сведение краевой задачи к операторному уравнению в некотором функциональном пространстве. Зачастую этим пространством является пространство С.Л. Соболева $W_p^1(\Omega)$. Курсовая работа предполагает изучение свойств пространства Соболева в случае $\Omega = (0, \ell)$, ознакомление с техникой получения различных интегральных неравенств в этих пространствах с помощью теоремы об эквивалентных нормировках, самостоятельное получение точных значений констант в некоторых из них.