

Кафедра математической физики

Курсовые работы для студентов II курса

Профессор УРАЛЬЦЕВА Нина Николаевна

1. Функция расстояния и барьеры.

Литература: Д. Гилбарг, Н.С. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., Наука. 1989. п.14.6.

2. Хаусдорфова мера.

Литература: Л.К. Эванс, Р.Ф.Гариепи. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск, Научная книга, 2002. Глава 2.

3. Выпуклые функции.

Литература: Л.К. Эванс, Р.Ф.Гариепи. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск, Научная книга, 2002. п.6.3, 6.4

Все три темы предполагают изучение литературы с последующим решением конкретных задач.

Профессор АРХИПОВА Арина Алексеевна

1. Связь вариационных и краевых задач, одномерный случай (по п.5.1, глава 5, [Б-Дж.-Г]).

2. Принцип Дирихле. Контрпримеры, показывающие нарушение этого принципа (по п.1.2 книги [G]).

3. Четыре эквивалентных определения пространства ВМО (пространства функций ограниченной средней осцилляции по включенным в область шарам). Эти пространства, изучение которых началось интенсивно после 1965 года, получили в настоящее время широкое применение в теории краевых задач. (Теорема 6.25 [G])

Литературу из монографий [Б-Дж.-Г] и [G] можно получить у руководителя.

[Б-Дж.-Г] Дж.Бутаццо, М. Джаквинта, Ст.Гильдебрандт "Одномерные вариационные задачи". Новосибирск. Научная книга.2002 (Университетская серия, т.11)

[G] M.Giaquinta, L. Martinazzi. "An Introduction to the Regularity Theory for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs". Scuola Norm Sup., Pisa (Lecture Notes, 11), 2012

Доцент БАХАРЕВ Федор Львович

1. Транспортировка массы и изопериметрические задачи.

Предполагается изучить, как задача об оптимальном способе перевозки грузов помогает изящно решить изопериметрическую задачу (задачу нахождения тела максимального объема при заданной площади поверхности). В перспективе планируется развить указанный метод на доказательство других неравенств, по сути являющихся изопериметрическими.

2. Асимптотические методы в анализе и математической физике.

Асимптотическое исследование по сути состоит в отыскании простой приближенной формулы для вычисления сложной функции. Есть множество простых по постановке, но сложных по существу задач асимптотического характера. Например, поиск количества точек с целочисленными координатами в круге радиуса R , или поиск количества простых чисел, не превосходящих данного натурального числа N . Предполагается изучить некоторые методы построения асимптотических разложений, которые традиционно не укладываются в общий курс математического анализа и могут быть полезны при исследовании задач математической физики.

3. Меры несимметричности выпуклых тел.

Предполагается изучить некоторые количественные характеристики, описывающие то, насколько данное выпуклое тело является несимметричным. Как изменяется мера несимметричности при различных видах симметризации? Предполагается произвести асимптотический анализ меры несимметричности n -мерного симплекса. Это потребует нестандартных подходов к вычислению объема пересечения двух выпуклых тел, изучения некоторых свойств так называемых неубывающих перестановок функций, а также изучения методов построения асимптотики интегралов специального вида. Так одна простая геометрическая задача приведет к изучению ряда интересных и полезных инструментов математического анализа.

Литературу можно получить у преподавателя.

Профессор ИВОЧКИНА Нина Михайловна

1. Гиперболические многочлены Л. Гординга и неравенство Маклорена.

Хорошо известным частным случаем неравенства Маклорена является неравенство между средним арифметическим и геометрическим положительных чисел. Обобщённое неравенство Маклорена лежит в основе современной теории полностью нелинейных уравнений в частных производных второго порядка. Предлагается ознакомиться с теорией Ларса Гординга и применить её для простейшего вывода неравенства. В качестве исторического аспекта предлагается также провести исходное доказательство Маклорена.

Литература: Н.М. Ивочкина, С.И. Прокофьева, Г.В. Якунина, Конусы Гординга в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Проблемы матем. анализа, 64 (2012), 63-80.

2. Ортогонально инвариантные нелинейные дифференциальные операторы второго порядка и криволинейное дифференцирование.

Тема по существу является алгебраической. Этот подход позволяет строить априорные оценки решений задачи Дирихле на границе. Предлагается ознакомиться с этой проблематикой и найти простое её описание. Возможны новые алгебраические результаты.

Литературу можно получить у руководителя.

3. Принцип максимума А.Д. Александрова и теоремы сравнения для m -гессиановских операторов.

Предполагается освоение методики и применение её к эволюционным полностью нелинейным m -гессиановским уравнениям.

Литература: (i) А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева, Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения. Зап. науч. семин. ЛОМИ 147 (1985), 95-109.

(ii) А.И. Назаров, Принцип максимума А.Д. Александрова. Совр. матем. и её прилож. 29 (2005), обзор 17с.

Дополнительную литературу можно получить у руководителя.

Доцент КАРОЛЬ Андрей Игоревич

1. Асимптотические разложения интегралов: метод Лапласа, метод стационарной фазы.

Предполагается вначале освоить технику построения асимптотических разложений интегралов. Основным интерес для дальнейшего представляют разложения кратных интегралов в случае, когда фазовая функция в экстремальной точке вырождена.

Литература: М.В. Федорюк. Метод перевала, М., Наука, 1977г. 1-3 главы.

2. Асимптотика объема множества меньших значений функции.

Предполагается получить асимптотики объема меньших значений для функций, имеющих в данной точке минимума росток с данным многогранником Ньютона.

Литературу можно получить у преподавателя.

Профессор НАЗАРОВ Александр Ильич

1. Задача Вентцеля – постановка и простейшие свойства.

Нужно изучить по литературе постановку простейших краевых задач для уравнений в частных производных “из физических соображений” и применить полученные навыки к одной из неклассических задач – так называемой задаче Вентцеля. Работа требует от студента наличия некоторых следов обучения физике в школе.

2. Перестановки функций (геометрические и аналитические свойства).

Симметричные и монотонные перестановки (rearrangements) последовательностей и функций имеют многочисленные применения в современном вариационном исчислении и в теории уравнений в частных производных. Работа предполагает изучение их свойств по литературе и вывод этих свойств для некоторых аналогичных операций над функциями.

3. Выпуклые и выпукло-монотонные оболочки функций (аналитические свойства геометрических объектов; тема интересная, но трудная).

Дальнейшие указания и литературу можно получить у преподавателя.

Профессор ОСМОЛОВСКИЙ Виктор Георгиевич

1. Контрпримеры для задач вариационного исчисления.

В отличие от конечномерных задач в задачах на экстремум в бесконечномерном пространстве непрерывности и коэрцитивности функционала недостаточно для достижимости этим функционалом наименьшего значения. Традиционная теорема Вейерштрасса в бесконечномерном пространстве заменяется более сложной, в которой речь идет о слабо полунепрерывных снизу коэрцитивных функционалах в рефлексивном банаховом пространстве. В предлагаемой курсовой работе требуется построить ряд контрпримеров, доказывающих точность утверждения этой теоремы.

2. Пространство функций ограниченной вариации.

Для вариационных задач с линейным ростом интегранта по первой производной возникают проблемы с их разрешимостью. Причиной тому является нерефлексивность естественного для этого класса задач пространства Соболева. Одним из выходов из этой ситуации является переход от пространства Соболева к более широкому – пространству функций ограниченной вариации. Последнее пространство по-прежнему не рефлексивно, но обладает более хорошим оператором вложения в пространство суммируемых функций. В курсовой работе предполагается изучение простейших свойств соболевских пространств, пространств функций ограниченной вариации и доказательство разрешимости указанной вариационной задачи в расширенной постановке.

Литературу и дальнейшие указания можно получить у преподавателя.

Профессор СТЕПАНОВ Евгений Олегович

1. Как выглядит разбиение евклидовой плоскости на $k = 1, 2, \dots$ множества заданной гауссовой меры и минимального (среди всех таких разбиений) гауссова периметра? Для случая $k = 1$ этот вопрос решается изопериметрическим неравенством, доказанным Б. Цирельсоном и В. Судаковым. Для произвольного k вопрос является открытым. Интересен вопрос и в евклидовом пространстве произвольной размерности.

2. При заданном поле скоростей движущейся жидкости можно считать, что ее плотность удовлетворяет уравнению неразрывности. Какие свойства поля скоростей обеспечивают единственность (в разумном классе) слабого решения этого уравнения? Частичный ответ (для класса почти измеримых почти всюду ограниченных функций) дает теория DiPerna-Lions. Аналогичный вопрос интересен и для векторного уравнения переноса магнитного поля движущейся жидкостью.

Обе курсовые работы предполагают решение конкретных задач на приведенные темы. Сами задачи, литературу и дальнейшие указания можно получить у руководителя.