Кафедра математической физики

Курсовые работы для студентов II курса

Профессор УРАЛЬЦЕВА Нина Николаевна

1. Функция расстояния и барьеры.

Литература: Д. Гилбарг, Н.С. Трудингер. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., Наука. 1989. п.14.6.

2. Хаусдорфова мера.

Литература: Л.К. Эванс, Р.Ф.Гариепи. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск, Научная книга, 2002. Глава 2.

3. Выпуклые функции.

Литература: Л.К. Эванс, Р.Ф.Гариепи. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск, Научная книга, 2002. п.6.3, 6.4.

Все три темы предполагают изучение литературы с последующим решением конкретных задач.

Профессор АРХИПОВА Арина Алексеевна

1. Связь вариационных и краевых задач, одномерный случай (по п.5.1, глава 5, [Б-Дж.-Г]).

2. Принцип Дирихле. Контрпримеры, показывающие нарушение этого принципа (по п.1.2 книги [G]).

3. Четыре эквивалентных определения пространства BMO (пространства функций ограниченной средней осцилляции по включенным в область шарам). Эти пространства, изучение которых началось интенсивно после 1965 года, получили в настоящее время широкое применение в теории краевых задач. (Теорема 6.25 [G])

Литературу [Б-Дж-Г] и [G] можно получить у руководителя.

[Б-Дж-Г] Дж.Бутаццо, М. Джаквинта, Ст.Гильдебрандт Одномерные ва- риационные задачи. Новосибирск. Научная книга. 2002

[G] M.Giaquinta, L. Martinazzi. An Introduction to the Regularity Theory for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs. Scuola Norm Sup., Pisa (Lecture Notes, 11), 2012

4. Мера Хаусдорфа и локальные свойства интегрируемых функций.

Рассмотрим неорицательную интегрируемую в области пространства $\mathbb{R}^n$ функцию. Известно, что если вычислить интеграл от этой функции по шару $B_R(x)$, содержащемуся в этой области, то при $R \to 0$ значение интеграла стремится к нулю. Зафиксируем произвольно $s \in (0, n)$ и выделим множество всех точек x рассматриваемой области, в которых интеграл стремится к нулю быстрее, чем R^s при $R \to 0$. Оказалось, что хаусдорфова мера размерности s дополнительного множества равна нулю. Изучение локального поведения интегрируемых функций очень важно при оценке сингулярных множеств, возникающих при решении дифференциальных уравнений и систем.

Литературу можно получить у руководителя.

5. Обобщение понятия функции одной переменной.

Определение обобщенной функции одной переменной и решение уравнения $y' = f$ в пространстве обобщенных функций.

Литература: Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс. Глава 1, пп.1–5.

Доцент БАХАРЕВ Федор Львович

1. Транспортировка массы и изопериметрические задачи.

Предполагается изучить, как задача об оптимальном способе перевозки грузов помогает изящно решить изопериметрическую задачу (задачу нахождения тела максимального объема при заданной площади поверхности). В перспективе планируется развить указанный метод на доказательство других неравенств, по сути являющихся изопериметрическими.

2. Асимптотические методы в анализе и математической физике.

Асимптотическое исследование по сути состоит в отыскании простой приближенной формулы для вычисления сложной функции. Есть множество простых по постановке, но сложных по существу задач асимптотического характера. Например, поиск количества точек с целочисленными координатами в круге радиуса R, или поиск количества простых чисел, не превосходящих данного натурального числа N. Предполагается изучить некоторые методы построения асимптотических разложений, которые традиционно не укладываются в общий курс математического анализа и могут быть полезны при исследовании задач математической физики.

3. Меры несимметричности выпуклых тел.

Предполагается изучить некоторые количественные характеристики, описывающие то, насколько данное выпуклое тело является несимметричным. Как изменяется мера несимметричности при различных видах симметризации? Предполагается произвести асимптотический анализ меры несимметричности n-мерного симплекса. Это потребует нестандартных подходов к вычислению объема пересечения двух выпуклых тел, изучения некоторых свойств так называемых неубывающих перестановок функций, а также изучения методов построения асимптотики интегралов специального вида. Так одна простая геометрическая задача приведет к изучению ряда интересных и полезных инструментов математического анализа.

Литературу можно получить у руководителя.

Профессор ИВОЧКИНА Нина Михайловна

1. Гиперболические многочлены Л.Гординга в пространстве симметрических матриц. Обобщённое неравенство Маклорена.

Хорошо известным частным случаем неравенства Маклорена является неравенство между средним арифметическим и геометрическим положительных чисел. Для симметрических функций других порядков требование не является необходимым, что и предлагается проверить. Обобщённым неравенством Маклорена называют его матричную версию. Последняя лежит в основе современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Предполагается ознакомиться с теорией Ларса Гординга и применить её для простейшего вывода неравенства. В качестве исторического аспекта предлагается восстановить исходное доказательство Маклорена.

Литература: Н.М.Ивочкина, С.И.Прокофьева, Г.В.Якунина, Конусы Гординга в современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Проблемы математического анализа, 64 (2012), 63-80.

2. Ортогональная инвариантность нелинейных дифференциальных операторов и криволинейное дифференцирование.

Тема по существу является алгебраической. Этот подход позволяет строить априорные оценки вторых производных решений задачи Дирихле по касательным направлениям на границе. Предполагается ознакомиться с этой проблематикой и найти простое её описание. Возможны новые алгебраические результаты.

Литературу можно получить у руководителя.

3. Принцип максимума А.Д. Александрова и теоремы сравнения для m-гессиановских операторов.

Предполагается освоение методики и применение её к эволюционным полностью нелинейным m-гессиановским уравнениям.

Литература: (i) А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева, Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения. Зап. науч. семин. ЛОМИ 147 (1985), 95-109.

(ii) А.И. Назаров, Принцип максимума А.Д. Александрова. Совр. матем. и её прилож. 29 (2005), обзор 17с.

Дополнительную литературу можно получить у руководителя.

Доцент КАРОЛЬ Андрей Игоревич

1. Асимптотические разложения интегралов: метод Лапласа, метод стационарной фазы.

Предполагается вначале освоить технику построения асимптотических разложений интегралов. Основной интерес для дальнейшего представляет получение асимптотических разложений преобразования Фурье (коэффициентов Фурье).

Литература: М.В.Федорюк. Метод перевала, М., Наука, 1977г. 1-3 главы.

2. Асимптотические свойства собственных чисел интегральных операторов на окружности.

Предполагается освоить методы получения оценок скорости убывания (асимптотики) собственных чисел.

Литература: М.С.Бирман, М.З.Соломяк Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространства. Лань, 2010.

Профессор КРЫЖЕВИЧ Сергей Геннадьевич

1. Наличие периодических решений у линейных неоднородных ОДУ второго порядка с ограниченным решением.

2. Хаотическая динамика для унимодальных отображений отрезка.

3. Собственные числа, соответствующие однородным краевым задачам для линейных ОДУ на отрезке.

4. Разрешимость операторов, соответствующих линейным ОДУ, в соболевских пространствах.

5. Инвариантные меры для отображений малой размерности.

Литературу можно получить у руководителя.

Профессор НАЗАРОВ Александр Ильич

1. Функции Грина краевых задач для обыкновенных дифференциальных операторов и их преобразования.

2. Перестановки функций (геометрические и аналитические свойства).

Симметричные и монотонные перестановки (rearrangements) последовательностей и функций имеют многочисленные применения в современном вариационном исчислении и в теории уравнений в частных производных. Работа предполагает изучение их свойств по литературе и вывод этих свойств для некоторых аналогичных операций над функциями.

3. Выпуклые и выпукло-монотонные оболочки функций (аналитические свойства геометрических объектов; тема интересная, но трудная).

Дальнейшие указания и литературу можно получить у руководителя.

Профессор ОСМОЛОВСКИЙ Виктор Георгиевич

1. Контрпримеры для задач вариационного исчисления.

В отличие от конечномерных задач в задачах на экстремум в бесконечномерном пространстве непрерывности и коэрцитивности функционала недостаточно для достижимости этим функционалом наименьшего значения. Традиционная теорема Вейерштрасса в бесконечномерном пространстве заменяется более сложной, в которой речь идет о слабо полунепрерывных снизу коэрцитивных функционалах в рефлексивном банаховом пространстве. В предлагаемой курсовой работе требуется построить ряд контрпримеров, доказывающих точность утверждения этой теоремы.

2. Пространство Соболева на отрезке.

Существуют различные способы определения производной, приводящие к различным классам дифференцируемых функций. Опредление производной по Соболеву приводит к пространствам, лежащим между классом непрерывно дифференцируемых функций и классом распределений по Шварцу. Пространства Соболева являются ключевым объектом при изучении ряда свойств уравнений в частных производных и вариационного исчисления. Предметом курсовой работы является подробное изучение таких свойств пространств Соболева на отрезке, как полнота, сепарабельность, рефлексивность, плотность гладких функций, а также свойств опероторов вложения этих пространств в другие функциональне пространства. Будут предложены задачи по применению соболевских пространств в вариационном исчислении и в теории одномерных краевых задач.

3. Пространство функций ограниченной вариации.

Для вариационных задач с линейным ростом интегранта по первой производной возникают проблемы с их разрешимостью. Причиной тому является нерефлексивность естественного для этого класса задач пространства Соболева. Одним из выходов из этой ситуации является переход от пространства Соболева к более широкому – пространству функций ограниченной вариации. Последнее пространство по-прежнему не рефлексивно, но обладает более хорошим оператором вложения в пространство суммируемых функций. В курсовой работе предполагается изучение простейших свойств соболевских пространств, пространств функций ограниченной вариации и доказательство разрешимости указанной вариационной задачи в расширенной постановке.

Литературу и дальнейшие указания можно получить у руководителя.

Профессор СТЕПАНОВ Евгений Олегович

1. Необходимо провести газопровод – кривую (замкнутое связное множество) наименьшей возможной длины (одномерной меры Хаусдорфа), подходящую на заданное расстояние r ко всем домам некоторого населенного пункта (ко всем точкам заданного множества M). Как выглядит газопровод, если M – это окружность радиуса R (для некоторых отношений r/R ответ известен; разумно предположить, что ответ не зависит от этого отношения)? Круг радиуса R? Квадрат? Граница квадрата?

2. При каких условиях заданный нормальный 2-поток в $\mathbb{R}^3$ представим в виде интеграла ("дезинтегрируем") по спрямляемым нормальным потокам а) без потери массы? б) с возможной потерей массы? Для 1-потоков ответ дается теоремами С. Смирнова о представлении одномерных потоков в виде интегралов по кривым.

3. Из теоремы Гирсанова следует, что стохастическое обыкновенное дифференциальное уравнение с не обязательно гладким дрейфом, но с постоянной ненулевой диффузией, имеет единственное (слабое) решение. Хорошо бы получить из этого результата (переходом к пределу при диффузии, стремящейся к нулю) классический принцип суперпозиции для (гиперболического) дифференциального уравнения первого порядка – уравнения неразрывности с только лишь измеримым полем скоростей. На какие фазовые пространства (кроме конечномерного евклидова) можно распространить эту технику (кажется, что наверняка можно на гильбертово пространство)?

4. Как выглядит разбиение евклидовой плоскости на $k = 2, 3, \ldots$ множества заданной гауссовой меры и минимального (среди всех таких разбиений) гауссова периметра? Для случая $k = 2$ этот вопрос решается изопериметрическим неравенством, доказанным Б. Цирельсоном и В. Судаковым. Для произвольного k вопрос является открытым. Интересен вопрос и в евклидовом пространстве произвольной размерности.

5. При заданном поле скоростей движущейся жидкости можно считать, что ее плотность удовлетворяет уравнению неразрывности. Какие свойства поля скоростей обеспечивают единственность (в разумном классе) слабого решения этого уравнения? Частичный ответ (для класса почти измеримых почти всюду ограниченных функций) дает теория Di Perna-Lions'a. Аналогичный вопрос интересен и для векторного уравнения переноса магнитного поля движущейся жидкостью.

Все курсовые работы предполагают решение конкретных задач на приведенные темы. Сами задачи, литературу и дальнейшие указания можно получить у руководителя.