ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОДИННАДЦАТОЙ КОЛМОГОРОВСКОЙ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ознаменование дня рождения А.Н.Колмогорова кафедра теории вероятностей механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова при поддержке Московской Государственной Академии тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова провела одиннадцатую Колмогоровскую студенческую олимпиаду по теории вероятностей. Информация о предыдущих олимпиадах содержится на сайте кафедры теории вероятностей (`http://mech.math.msu.su/probab`), а также в [1] и по ссылкам там же.

Олимпиада была проведена 21 апреля 2012 г. раздельно для I–II и III–V курсов (продолжительность — 5 часов). В олимпиаде приняли участие и сдали работы 35 студентов I–II курсов и 21 студент III–V курсов механико-математического факультета Московского Государственного Университета, а также математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета, факультета прикладной математики и компьютерных технологий Вологодского Государственного Педагогического Университета и физико-технического факультета Киевского Политехнического Института.

Задачи олимпиады.

В скобках после номера задачи (или пункта) указываются курсы, на которых предлагалась данная задача, затем число решивших ее студентов I–II курса, и, наконец, число решивших ее студентов III–V курса (для задач, которые предлагались только в одной возрастной категории, приведено только число решивших).

Задача 1. (I–V; 10, 6) Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, а $X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$. Вектор $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})$ — это значения случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, упорядоченные по возрастанию. Доказать, что $\sum_{i=1}^{n} f(X_{(i)})(X_{(i)} - X_{(i-1)}) \to \int_0^1 f(x)dx$ при $n \to \infty$, с вероятностью единица (здесь $X_{(0)} := 0$).

Задача 2. (I–V; 14, 6) Летящий в пространстве по случайной прямой метеорит сталкивается с неподвижной шарообразной планетой. Точка пересечения указанной прямой с перпендикулярным ей центральным сечением планеты равномерно распределена на этом сечении. Найти математическое ожидание угла падения.

Задача 3. Пусть X — интегрируемая случайная величина, и $\varphi(x) = \mathsf{E}|X - x|$, $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что функция φ однозначно определяет распределение X, если **а)** (I–II; 10) X имеет непрерывную плотность, **б)** (III–V; 4) X не обязательно имеет непрерывную плотность.

Задача 4. (I–V; 7, 4) Случайным образом выбирается перестановка n элементов. Найти математическое ожидание суммы квадратов длин ее циклов.

Задача 5. (I–V; 2, 4) Пусть $S_0 = 0$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \in \mathbb{N}$, где н.о.р. случайные величины $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ принимают значения 1 и -1 с вероятностями p и q, и $p < q$. Доказать, что $\mathsf{E}(\sup_{n \geq 0} S_n)^2 < \infty$.

Задача 6. (III–V; 6) Пусть $\{M_n, n \geq 0\}$ — неотрицательный мартингал. Доказать, что, попав в нуль, он с вероятностью единица из него не выйдет (т.е. $\mathsf{P}(\cup_{k<n}\{M_k = 0, M_n > 0\}) = 0$).

Задача 7. (I–V; 1, 2) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ пусть $X_1^{(n)}, \ldots, X_{n+1}^{(n)}$ — н.о.р. случайные величины, принимающие с равными вероятностями значения $1, \ldots, n$. Пусть τ_n — это первый номер $i \in \{2, \ldots, n+1\}$, для которого в наборе $\{X_1^{(n)}, \ldots, X_i^{(n)}\}$ присутствуют хотя бы два совпадающих значения. Доказать, что последовательность $\tau_n/\sqrt{n}$ сходится по распределению к некоторой случайной величине Y, и найти ее плотность.

Задача 8. (I–V; 0, 0) Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots$ — н.о.р. случайные величины, тождественно не равные нулю, $\mathsf{E}|X_0| < \infty$. Тогда радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} X_n z^n$ с вероятностью единица равен 1 (это следует из формулы Коши-Адамара и леммы Бореля-Кантелли), и, следовательно, этот ряд п.н. сходится к непрерывной на $[0, 1)$ функции $G(z, \omega)$. Можно ли взять распределение X_0 так, чтобы функция G с вероятностью единица была продолжаема до непрерывной на отрезке $[0, 1]$?

Задача 9. N детей выбирают водящего в игре. Для этого они становятся в круг, в соответствии со списком фамилий по алфавиту, и каждый(ая) показывает случайное число пальцев (от 0 до 5, с равными вероятностями). Затем по часовой стрелке отсчитывается (считая с того, кто первый в списке) столько шагов, сколько всего пальцев показано. Верно ли, что вероятности всех детей стать водящим одинаковы, если **а)** (I–V; 21, 12) $N = 3$, **б)** (I–V; 1, 3) $N = 24$?

Задача 10. (I–V; 3, 8) Пусть X — случайная величина, $X \geq 0$. Доказать, что $\mathsf{E}X^4 \mathsf{E}X^8 \leq \mathsf{E}X^3 \mathsf{E}X^9$.

Победители олимпиады.

Разбор задач и награждение победителей проводились на Большом семинаре кафедры теории вероятностей 25 апреля 2012 г.

Победители среди студентов I–II курсов

Первая премия

Попова Светлана Николаевна

Студентка II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7 решенных задач).

Омельяненко Виктор Алексеевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (6,5 решенных задач).

Вторая премия

Лавров Петр Аркадьевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (5 решенных задач).

Третья премия

Ивлев Федор Алексеевич

Студент II курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (4 решенные задачи).

Победители среди студентов III–V курсов

Первая премия

Шульчевский Дмитрий Игоревич

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (10 решенных задач), научный руководитель — А.П. Шашкин.

Вторая премия

Палецких Алексей Андреевич

Студент IV курса математико-механического факультета Санкт-Петербургского Государственного Университета (8,5 решенных задач), научный руководитель — А.И. Назаров.

Третья премия

Воробьев Илья Викторович

Студент IV курса механико-математического факультета Московского Государственного Университета (7,5 решенных задач), научный руководитель — Г.И. Фалин.

Список литературы

[1] Информация о десятой "Колмогоровской студенческой олимпиаде по теории вероятностей". — Теор. вероятн. и примен., **56** (2011), вып. 2.

3 мая 2012 г.

Оргкомитет одиннадцатой Колмогоровской студенческой олимпиады по теории вероятностей:
академик РАН, профессор А.Н. Ширяев,
к.ф.-м.н., доцент А.П. Шашкин,
к.ф.-м.н., доцент М.М. Мусин,
к.ф.-м.н., ассистенты Е.Е. Баштова, П.А.Яськов,
аспиранты А.А. Алиев, О.А. Бутковский,
А.А.Громов, В.П. Демичев, Я.А.Люлько,
А.А. Муравлев, А.А.Хапланов.