Программа курса

Уравнения математической физики

для специальности 010501 (экзамен, осень 2013.)

Интегральные операторы

Ограниченность интегрального оператора в L_p. Операторы со слабой особенностью – ограниченность и компактность в L_p. Равномерная сходимость интеграла. Оператор со слабой особенностью в C. Непрерывность решений интегральных уравнений со слабой особенностью.

Теория потенциала

Объёмный потенциал и его простейшие свойства. Вторые производные, вычисление оператора Лапласа от объёмного потенциала. Поверхности класса C^2 и их свойства. Потенциал двойного слоя и его простейшие свойства. Интеграл Гаусса. Абсолютная сходимость интеграла Гаусса. Предельные значения потенциала двойного слоя. Свойства потенциала простого слоя. Правильная нормальная производная потенциала простого слоя. Сведение краевых задач к интегральным уравнениям. Разрешимость первой и второй пар интегральных уравнений. Решение внешней задачи Дирихле. Краевые задачи в двумерном случае. Существование и свойства функции Грина для областей с границей класса C^2. Собственные числа и собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа.

Пространства Соболева

Обобщенные производные по Соболеву. Примеры. Обобщенные производные на отрезке. Замкнутость дифференцирования. Пространство H^1 и его полнота. Пространство «с ноликом» и его полнота, продолжение нулем. Пространство Соболева в R^n, описание в терминах преобразования Фурье, вложение в C^k и L_p. Теорема о продолжении, плотность гладких функций в пространстве Соболева. Неравенство Фридрихса, эквивалентные нормы. Теорема Реллиха. След функции на границе области. Пространство H^{-1}.

Обобщенные решения эллиптических краевых задач

Классическое и обобщенное решение эллиптического уравнения и краевой задачи. Эллиптический оператор, непрерывность в пространствах Соболева. Теоремы единственности для задачи Дирихле. Энергетическое пространство --- вывод и исследование абстрактного уравнения для задачи Дирихле. Фредгольмовость оператора задачи Дирихле. Задача на собственные числа, сходимость рядов Фурье. Вариационные свойства собственных чисел. Теорема о первом собственном числе оператора Лапласа. Эллиптический оператор в R^n, теорема об изоморфизме. Гладкость решения эллиптического уравнения. Квадратичный функционал в пространствах Соболева, связи с задачей Дирихле и задачей Неймана. Обобщенное решение задачи Неймана. Теорема единственности для обобщенного решения задачи Неймана. Энергетическое пространство, исследование абстрактного уравнения для задачи Неймана. Теорема существования обобщенного решения задачи Неймана.

Обобщенные решения нестационарных задач

Функции со значениями в гильбертовом пространстве. Обобщенное решение начально-краевой задачи Дирихле для уравнения теплопроводности, априорная оценка. Метод Фурье для уравнения теплопроводности. Классическая разрешимость начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Определение обобщенного решения начально-краевой задачи для волнового уравнения, априорная оценка. Метод Фурье для волнового уравнения.

Вычислительные методы

Метод Ритца. Метод конечных элементов.